# Soluciones axiomáticas en juegos cooperativos

Francisco Sánchez Sánchez

Universiadad Autónoma de Aguascalientes
Marzo 12, 2012

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$
- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

# La técnica

- $G$ espacio de problemas
- $S$ espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que $\varphi$ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

# La técnica

**Theorem**

*Existe una única*

$$\varphi : G \to S$$

*que satisface los axiomas anteriores. Además,*

$$\varphi(v) = \dots$$

# Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

tal que $v(\varnothing) = 0$.

- $v(S)$ es la valía de la coalición $S$.
- $G$ conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores $N$.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

  tal que $v(\varnothing) = 0$.
- $v(S)$ es la valía de la coalición $S$.
- $G$ conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores $N$.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

  tal que $v(\varnothing) = 0$.
- $v(S)$ es la valía de la coalición $S$.
- $G$ conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores $N$.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \to \mathbb{R}$$

  tal que $v(\emptyset) = 0$.
- $v(S)$ es la valía de la coalición $S$.
- $G$ conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores $N$.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^N$$

# Ejemplo.

Supongamos:

- $N$ conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los $S$ museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo $i$.

# Ejemplo.

Supongamos:

- $N$ conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los $S$ museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo $i$.

# Ejemplo.

Supongamos:

- $N$ conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los $S$ museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo $i$.

# Ejemplo.

Supongamos:

- $N$ conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los $S$ museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo $i$.

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador $i$ es un jugador nulo en $v$ si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si $i$ es un jugador nulo en $v$ entonces $\varphi_i(v) = 0$.

**Theorem**

*(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v)=\theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$

El jugador $i$ es un jugador nulo en $v$ si y sólo si $v(S\cup\{i\})=v(S)$ para todo $S\subseteq N\setminus\{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si $i$ es un jugador nulo en $v$ entonces $\varphi_i(v)=0$.

**Theorem**

*(Shapley 1953) Existe una única $\varphi: G\to\mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por*

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\not\ni i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left(v(S\cup\{i\})-v(S)\right)$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador $i$ es un jugador nulo en $v$ si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si $i$ es un jugador nulo en $v$ entonces $\varphi_i(v) = 0$.

**Theorem**

*(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador $i$ es un jugador nulo en $v$ si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si $i$ es un jugador nulo en $v$ entonces $\varphi_i(v) = 0$.

## Theorem

*(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v)=\theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$

El jugador $i$ es un jugador nulo en $v$ si y sólo si $v(S\cup\{i\})=v(S)$ para todo $S\subseteq N\backslash\{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si $i$ es un jugador nulo en $v$ entonces $\varphi_i(v)=0$.

**Theorem**

*(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G\to\mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por*

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\not\ni i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left(v(S\cup\{i\})-v(S)\right)$$

# Ejemplos

$$\begin{array}{lll} \nu(\{1\}) = 1 & \nu(\{2\}) = 4 & \nu(\{3\}) = 6 \\ \nu(\{1,2\}) = 4 & \nu(\{1,3\}) = 6 & \nu(\{2,3\}) = 6 \\ \nu(\{1,2,3\}) = 6 & & \end{array}$$

# Ejemplos

ahora utilizando la fórmula,

$$\varphi_i(\nu) = 1/n! \sum_{\mathcal{R}} (\nu(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(P_i^{\mathcal{R}}))$$

| | $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$ | | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{R}$ | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ |
| 1 2 3 | 1 | 3 | 2 |
| 1 3 2 | 1 | 0 | 5 |
| 2 1 3 | 0 | 4 | 2 |
| 2 3 1 | 0 | 4 | 2 |
| 3 1 2 | 0 | 0 | 6 |
| 3 2 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 2 | 11 | 23 |

de donde

$$\varphi(\nu) = (1/3, 11/6, 23/6).$$

# Ejemplo 2

Hay $n$ inversionistas, el $i$-ésimo con un monto $x_i$. El banco ofrece tasas de interés cada vez más altas conforme el monto que se invierte es más alto. Así, lo que les conviene a los inversionistas es juntarse para conseguir una tasa más atractiva. El juego lo podemos definir como, $v(S)$ el rendimiento que obtienen los inversionistas en $S$ cuando realizan su inversión conjuntamente. Así, $Sh_i(v)$ es la parte del rendimiento que le toca a $i$.

Supongamos tres inversionistas con montos, 100, 300, 400 (en miles de euros) y las tasas: 5 % si el monto es menor o igual a 150, 6 % si es menor que 250, y 8 % si el monto es mayor o igual que 500. Así,

$$\begin{array}{ccc} v(\{1\}) = 0{,}05(100) & v(\{2\}) = 0{,}06(300) & v(\{3\}) = 0{,}6(400) \\ v(\{1,2\}) = 0{,}06(400) & v(\{1,3\}) = 0{,}08(500) & v(\{2,3\}) = 0{,}08(700) \\ & v(\{1,2,3\}) = 0{,}08(800) & \end{array}$$

# Ejemplo 2

$$v(\{1\}) = 5 \qquad v(\{2\}) = 18 \qquad v(\{3\}) = 24$$
$$v(\{1,2\}) = 24 \qquad v(\{1,3\}) = 40 \qquad v(\{2,3\}) = 56$$
$$v(\{1,2,3\}) = 64$$

| | $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$ | | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{R}$ | $i = 1$ | $i = 2$ | $i = 3$ |
| 1 2 3 | 5 | 19 | 40 |
| 1 3 2 | 5 | 24 | 35 |
| 2 1 3 | 6 | 18 | 40 |
| 2 3 1 | 8 | 18 | 38 |
| 3 1 2 | 16 | 24 | 24 |
| 3 2 1 | 8 | 32 | 24 |
| | $\frac{48}{6} = 8$ | $\frac{135}{6} = 22{,}5$ | $\frac{201}{6} = 33{,}5$ |

# Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
- Definition
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:
  $$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

# Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i,j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

- Definition
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

# Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i,j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

- Definition
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$

- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$

- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

- Definition
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

- Definition
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i,j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

# Juegos y gráficas

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i,j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

- Definition
  La regla de asignación $\psi$ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

# Juegos y gráficas

- Definition
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Theorem
  *(Myerson). Dado un juego $\nu$ existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

*donde Sh es el Valor de Shapley. Además si $\nu$ es superaditivo la regla de asignación es estable.*

# Juegos y gráficas

- Definition
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Theorem
  *(Myerson). Dado un juego $\nu$ existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

*donde Sh es el Valor de Shapley. Además si $\nu$ es superaditivo la regla de asignación es estable.*

# Juegos y gráficas

- Definition
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Theorem
  *(Myerson). Dado un juego $\nu$ existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

  *donde Sh es el Valor de Shapley. Además si $\nu$ es superaditivo la regla de asignación es estable.*

# Juegos y gráficas

- Definition
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Theorem
  *(Myerson). Dado un juego $\nu$ existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

  *donde Sh es el Valor de Shapley. Además si $\nu$ es superaditivo la regla de asignación es estable.*

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

Sean $u$, $v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \ldots, M_n\}$ partición de $M$,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

Sean $u$, $v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \ldots, M_n\}$ partición de $M$,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

Sean $u$, $v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \ldots, M_n\}$ partición de $M$,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

Sean $u$, $v \in \mathbb{R}^N$ dadas por

$$v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

y dado $\{M_1, \ldots, M_n\}$ partición de $M$,

$$u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

Problema

La matriz $A$, donde $a_{ij}$ es el valor que el heredero $j$ le da al bien $i$.

Solución

$(u, x)$ donde $u$ es lo que le toca a los herederos en bienes y $x$ el vector de conpensaciones economicas.

$x_i$ compensación del heredero $i$.

# La distribución de herencias

Problema

La matriz $A$, donde $a_{ij}$ es el valor que el heredero $j$ le da al bien $i$.

Solución

$(u, x)$ donde $u$ es lo que le toca a los herederos en bienes y $x$ el vector de conpensaciones economicas.

$x_i$ compensación del heredero $i$.

# La distribución de herencias

Problema

La matriz $A$, donde $a_{ij}$ es el valor que el heredero $j$ le da al bien $i$.

Solución

$(u, x)$ donde $u$ es lo que le toca a los herederos en bienes y $x$ el vector de conpensaciones economicas.

$x_i$ compensación del heredero $i$.

# La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\sum_{i \in N} x_i = 0$.

A2 $\frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}$ .

A3 $(u, x)$ es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

# La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\sum_{i \in N} x_i = 0$.

A2 $\frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}$ .

A3 $(u, x)$ es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

# La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\sum_{i \in N} x_i = 0$.

A2 $\frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{u_j + x_j}{v_j}$ .

A3 $(u, x)$ es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

# La distribución de herencias

- Theorem
  *La solución $(u, x)$ satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si $u$ proviene de los mejores postores y $x = \frac{\iota' u}{\iota' v} v - u$.*

  -

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Bien 1 | 10 | 15 | 20 |
| Bien 2 | 30 | 20 | 12 |
| $v$ | 50 | 35 | 32 |
| $u$ | 30 | 0 | 20 |
| $\frac{\iota' u}{\iota' v}$=0.46729 | -11.31 | 16.36 | -5.05 |

# La distribución de herencias

- Theorem
  *La solución $(u, x)$ satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si $u$ proviene de los mejores postores y $x = \frac{\iota' u}{\iota' v} v - u$.*
  -

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Bien 1 | 10 | 15 | 20 |
| Bien 2 | 30 | 20 | 12 |
| $v$ | 50 | 35 | 32 |
| $u$ | 30 | 0 | 20 |
| $\frac{\iota' u}{\iota' v}$=0.46729 | -11.31 | 16.36 | -5.05 |

# La distribución de herencias

- Theorem
  *La solución $(u, x)$ satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si $u$ proviene de los mejores postores y $x = \frac{\iota' u}{\iota' v} v - u$.*
  -

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Bien 1 | 10 | 15 | 20 |
| Bien 2 | 30 | 20 | 12 |
| $v$ | 50 | 35 | 32 |
| $u$ | 30 | 0 | 20 |
| $\frac{\iota' u}{\iota' v}$=0.46729 | -11.31 | 16.36 | -5.05 |

# Referencias


- Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). "Value Theory without Efficiency", *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.
- Hernández-Lamoneda L., Juárez-García R. and Sánchez-Sánchez F. "Dissection of cooperative solutions in game theory using representation techniques", Int. J. Game Theory **35** (2007), pp. 395-426.
- Myerson R. B., (1977) "Graphs and cooperation in games", *Mathematics of Operations Researh*, vol. 2, núm. 3, pp. 225-229.
- Sánchez Sánchez F., (2002)"About inheritance distribution", *Journal of Mathematical Economics*, 37, pp.297-309.
- Shapley L. S., "A value for $n$–person games", *Contribution to the Theory of Games*, vol. 2, 1953, pp. 307-317.